14

Para mejorar el discurso matemático

14.1 DEFINICIONES

A la pregunta: "¿Era Lincoln un hombre educado?" no se le puede dar una respuesta adecuada a menos que se esté de acuerdo con el significado de la frase "un hombre educado". No es posible la existencia de comprensión y por ende es imposible progresar en alguna discusión o en la resolución de algún problema a menos que los términos involucrados estén adecuadamente definidos o que, por acuerdo, permanezcan sin definir.

14.1A Requisitos para una buena definición

PRINCIPIO 1: *Todos los términos en una definición deberán estar definidos previamente* (*o que sean aquellos que, por acuerdo, se dejen indefinidos*).

Así, si se va a definir un polígono regular como un polígono equilátero y equiangular, es necesario que hayan sido previamente definidos los términos polígono, equiangular y equilateral.

PRINCIPIO 2: *El término que se esté definiendo deberá colocarse dentro de la clase, conjunto o categoría inmediatamente más grande a la que pertenezca.*

En consecuencia, los términos: polígono, cuadrilátero, paralelogramo y rectángulo deben ser definidos en ese orden. Una vez que el término polígono está definido, se define en seguida al término cuadrilátero como una especie de polígono. Un paralelogramo se define como una especie de cuadrilátero, hasta que finalmente, el término rectángulo se define como un tipo de paralelogramo.

Se puede entender cuál es la secuencia adecuada en una definición mediante el uso de un círculo para representar un conjunto de objetos. En la figura 14-1, el conjunto de rectángulos está contenido dentro del conjunto inmediatamente más grande de los paralelogramos. A su vez, el conjunto de los paralelogramos está contenido en el conjunto inmediatamente más grande de los cuadriláteros y así sucesivamente hasta que, al fin, el de los cuadriláteros esté contenido en el conjunto inmediatamente mayor de los polígonos.

Fig. 14-1

PRINCIPIO 3: *El término que se está definiendo deberá distinguirse entre todos los demás miembros de su clase.*
Por lo tanto, la definición de un triángulo como un polígono de tres lados es una buena definición porque muestra cómo un triángulo se distingue de todos los demás polígonos.

PRINCIPIO 4: *Las características distintivas de un término que se está definiendo deberán ser las menos posibles.*
De esta manera, un triángulo rectángulo deberá definirse como un triángulo con un ángulo recto y no como un triángulo con un ángulo recto y dos ángulos agudos adicionales.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1 SECUENCIA ADECUADA EN UNA DEFINICIÓN

¿En qué orden deben definirse los términos de los conjuntos siguientes?: (*a*) inglés, europeo, londinense; (*b*) cuadrilátero, cuadrado, rectángulo, paralelogramo.

Respuestas

(*a*) Europeo, inglés, londinense.

(*b*) Cuadrilátero, paralelogramo, rectángulo, cuadrado.

14.2 CORRECCIÓN DE DEFINICIONES DEFECTUOSAS

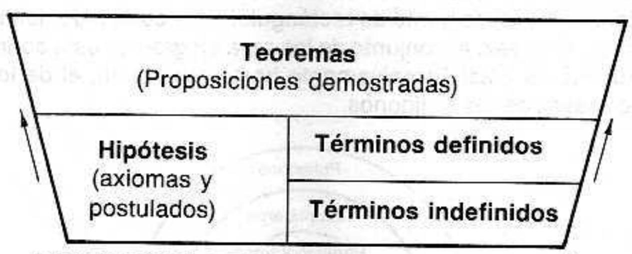
Corregir la siguiente definición: un trapezoide es un cuadrilátero con dos lados paralelos.

Solución

Esta definición es incompleta. La definición correcta es "un trapezoide es un cuadrilátero con sólo dos lados paralelos". Así, esta definición distingue un trapezoide de un paralelogramo.

14.2 RAZONAMIENTO DEDUCTIVO EN GEOMETRÍA

Los tipos de términos y proposiciones que se discuten en esta sección comprenden a la estructura deductiva en geometría; éstos pueden observarse en la figura 14-2.



ESTRUCTURA DEDUCTIVA DE LA GEOMETRÍA

Fig. 14-2

14.2A Términos definidos y no definidos

Punto, línea y superficie son los términos en geometría que por acuerdo no están definidos. Estos términos no definidos son el comienzo del proceso de definición en geometría y se encuentran contenidos de manera implícita en las definiciones de todos los demás términos geométricos.

Es así como es posible definir a un triángulo en términos de un polígono, a un polígono en términos de una figura geométrica y a ésta en términos de segmentos o partes de líneas. Sin embargo, este proceso de definición no puede continuarse todavía más, ya que el término línea no está definido.

14.2B Hipótesis

Los postulados y los axiomas son las proposiciones en geometría que no se demuestran. Se llaman hipótesis porque se aceptan como verdaderas. Estas hipótesis nos permiten comenzar con el proceso de demostración, de la misma forma que los términos indefinibles (no definidos) permiten el acceso al proceso de definición.

Así, cuando se dibuja un segmento de línea entre dos puntos, se justifica esto usando como argumento el postulado "dos puntos determinan una y sólo una línea recta". Este argumento es una hipótesis, dado que se supone cierto sin requerir de justificaciones ulteriores.

14.2C Teoremas

Los teoremas son las proposiciones que son demostradas en geometría. Al utilizar definiciones e hipótesis como argumentos, se deducen o demuestran teoremas que son básicos. Al usar teoremas para demostrar otros teoremas se enriquece el proceso de deducción. Sin embargo, si un teorema nuevo se utiliza para demostrar otro previo, se viola la secuencia lógica del discurso matemático.

Por ejemplo, el teorema "la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180°", se usa para demostrar el teorema "la suma de las medidas de los ángulos de un pentágono es de 540°". Éste, a su vez, nos permite demostrar que "cada ángulo en un pentágono regular mide 108°". Sin embargo, se violaría la secuencia lógica si se intentara usar este último teorema para demostrar cualquiera de los dos primeros.

14.3 EL CONVERSO, EL INVERSO Y EL CONTRAPOSITIVO DE UNA PROPOSICIÓN

Definición 1: *el converso de una proposición es otra proposición que se forma intercambiando la hipótesis y la conclusión de la primera.*

El converso de la proposición "los leones son animales salvajes" es "los animales salvajes son leones". Nótese que el converso no es necesariamente cierto.

Definición 2: *el negativo de la proposición es la negación de la misma.*

El negativo de la proposición "un ladrón es un criminal" es "un ladrón no es un criminal".

Definición 3: *el inverso de una proposición se forma mediante la negación tanto de la hipótesis como de la conclusión.*

El inverso de la proposición "un ladrón es un criminal" es "quien no es ladrón no es un criminal". Nótese que el inverso no necesariamente es verdadero.

Definición 4: *la contrapositiva de una proposición se forma intercambiando el negativo de una hipótesis con el negativo de la conclusión. Por lo tanto, la contrapositiva es el converso de la inversa y también la inversa del converso.*

De esta manera, la contrapositiva de la proposición "si usted vive en la ciudad de Nueva York, entonces vive en el estado de Nueva York" es "si usted no vive en el estado de Nueva York, entonces no vive en la ciudad de Nueva York". Nótese que ambas proposiciones son ciertas.

14.3A Principios sobre el converso, el inverso y la contrapositiva

Principio 1: *una proposición se considera falsa ai existe por lo menos un ejemplo falso de la misma.*

PRINCIPIO 2: *el converso de una definición es verdadero.*

La definición "un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados" y su converso "un polígono de cuatro lados es un cuadrilátero" son ciertos.

PRINCIPIO 3: *el converso de una proposición verdadera, con excepción del de una definición, no es necesariamente verdadero.*

La proposición "los ángulos rectos son congruentes" es verdadera, pero su converso, "los ángulos congruentes son rectos", no lo es necesariamente.

PRINCIPIO 4: *el inverso de una proposición verdadera no es necesariamente verdadero.*

La proposición "un cuadrado es un cuadrilátero" es verdadera, pero su inversa "algo no cuadrado no es un cuadrilátero", no es necesariamente cierta.

PRINCIPIO 5: *la contrapositiva de una proposición verdadera, es verdadera. La contrapositiva de una proposición falsa, es falsa.*

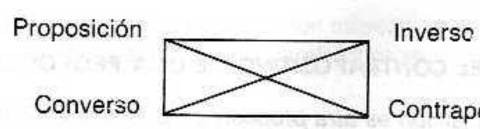
La proposición "un triángulo es un cuadrado" es evidentemente falsa, y su contrapositiva "algo no cuadrado no es un triángulo", también es falsa.

La proposición "los ángulos rectos son congruentes" es cierta; también lo es su contrapositiva "los ángulos que no son congruentes no son ángulos rectos"

14.3B Proposiciones lógicamente equivalentes

Las proposiciones lógicamente equivalentes son parejas de proposiciones relacionadas, donde ambas son o verdaderas o falsas. De acuerdo con el principio 5, una proposición y su contrapositiva son proposiciones lógicamente equivalentes. También lo son el converso y el inverso de una proposición, ya que cada una es la contrapositiva de la otra.

Las relaciones entre una proposición y su inverso, su converso y su contrapositiva se resumen en el rectángulo de equivalencia lógica de la figura 14-3:



Rectángulo de equivalencia lógica

Fig. 14-3

1. Las proposiciones lógicamente equivalentes están en los vértices diagonalmente opuestos. Las proposiciones lógicamente equivalentes por parejas son: (*a*) la proposición y su contrapositiva, y (*b*) el inverso y el converso de la misma proposición.

2. Las proposiciones que no son lógicamente equivalentes están en los vértices adyacentes. Las parejas de proposiciones que no son lógicamente equivalentes son: (*a*) una proposición y su inversa, (*b*) una proposición y su converso, (*c*) el converso y la contrapositiva de la misma proposición, y (*d*) la inversa y la contrapositiva de la misma proposición.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.3 EL CONVERSO DE UNA PROPOSICIÓN

Establezca el converso de cada una de las proposiciones siguientes e indique si es o no verdadera.

(*a*) Los ángulos suplementarios son aquellos donde la suma de sus medidas es igual a 180°.

(*b*) Un cuadrado es un paralelogramo con un ángulo recto.

(*c*) Un polígono regular es un polígono equilateral y equiangular.

Soluciones

(*a*) Dos ángulos donde la suma de sus medidas es 180° son suplementarios. (Verdadero)

(*b*) Un paralelogramo con un ángulo recto es un cuadrado. (Falso)

(*c*) Un polígono equilateral y equiangular es un polígono regular. (Verdadero)

14.4 La Negativa de una Proposición

Determine la negativa de: (*a*) $a = b$; (*b*) $m\angle B \neq m\angle C$; (*c*) $\angle C$ es el complemento de $\angle D$; (*d*) "el punto no está en la línea".

Soluciones

(*a*) $a \neq b$

(*b*) $m\angle B = m\angle C$

(*c*) $\angle C$ no es el complemento de $\angle D$

(*d*) El punto está en la línea

14.5 La Inversa de una Proposición

Determine la inversa de cada una de las siguientes proposiciones e indique si son o no ciertas.

(*a*) Una persona nacida en los Estados Unidos de América es un ciudadano de los Estados Unidos de América.

(*b*) Un escultor es una persona con talento.

(*c*) Un triángulo es un polígono.

Soluciones

(*a*) Una persona no nacida en los Estados Unidos de América no es ciudadana de los Estados Unidos de América. (Falso, ya que existen los ciudadanos naturalizados)

(*b*) Una persona que no sea un escultor no tiene talento. (Falso, ya que puede ser un excelente músico, etc.)

(*c*) Una figura que no sea un triángulo no es un polígono. (Falso, ya que la figura puede ser un cuadrilátero, etc.)

14.6 Construcción del Converso, la Inversa y la Contrapositiva

Determine el converso, la inversa y la contrapositiva de la proposición "un cuadrado es un rectángulo". Determine la veracidad o la falsedad de cada una de ellas, y constate la equivalencia lógica entre la proposición y su contrapositiva, y entre el converso y la inversa.

Soluciones

Proposición: un cuadrado es un rectángulo. (Verdadero)
Converso: un rectángulo es un cuadrado. (Falso)
Inversa: una figura que no es un cuadrado no es un rectángulo. (Falso)
Contrapositiva: una figura que no es un rectángulo no es un cuadrado. (Verdadero)

14.4 CONVERSO PARCIAL E INVERSA PARCIAL DE UN TEOREMA

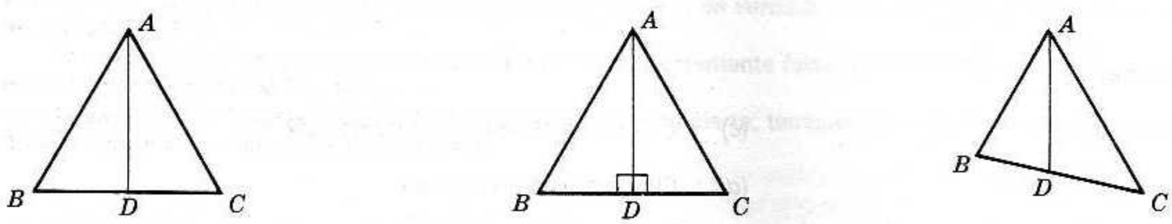
El *converso parcial de un teorema* se forma mediante el intercambio de cualquier condición en la hipótesis con alguna consecuencia en la conclusión.

La *inversa parcial de un teorema* se forma mediante la negación de cualquier condición en la hipótesis y una consecuencia en la conclusión.

Así, del teorema "si una recta bisecta al ángulo distinto de un triángulo isósceles, entonces es una altura a la base", se pueden formar una inversa parcial o un converso parcial, como se muestra en la figura 14-4.

En la formación de un inverso o converso parcial, la figura básica, tal como el triángulo de la figura 14-4, se mantiene intacta y no se intercambia ni se niega.

(*a*) Teorema (*b*) Converso parcial (*c*) Inverso parcial



(*a*) Teorema

Dado: $\triangle ABC$
(*1*) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
(*2*) $\overline{AD}$ bisecta al $\angle A$
Demuéstrese: (*3*) $\overline{AD}$ es la altura a $\overline{BC}$

(*b*) Converso parcial

Dado: $\triangle ABC$
(*2*) $\overline{AD}$ bisecta al $\angle A$
(*3*) $\overline{AD}$ es la altura a $\overline{BC}$
Demuéstrese: (*1*) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

(*c*) Inverso parcial

Dado: $\triangle ABC$
(*1'*) $\overline{AB} \ncong \overline{AC}$
(*2*) $\overline{AD}$ bisecta al $\angle A$
Demuéstrese: (*3'*) $\overline{AD}$ no es la altura a $\overline{BC}$

Fig. 14-4

En la figura 14-4(*b*), el converso parcial se forma mediante el intercambio entre las proposiciones (*1*) y (*3*). Formulado en palabras, el converso parcial dice: "si el bisector de un ángulo de un triángulo es una altura, entonces el triángulo es isósceles". Otro converso parcial se puede construir intercambiando (*2*) y (*3*).

En la figura 14-4 (*c*), se forma la inversa parcial intercambiando las proposiciones (*1*) y (*3*) por sus negativos, (*1'*) y (*3'*). Formulado en palabras el inverso parcial dice: "si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces la línea que bisecta a su ángulo incluido no es una altura al tercer lado". Otro inverso parcial puede construirse al negar (*2*) y (*3*).

PROBLEMAS RESUELTOS

14.7 CONSTRUCCIÓN DE CONVERSOS PARCIALES CON LAS INVERSAS PARCIALES DE UN TEOREMA

Construya: (*a*) los conversos parciales y (*b*) los inversos parciales de la proposición "ángulos suplementarios iguales son ángulos rectos".

Soluciones

(*a*) Conversos parciales: (1) ángulos rectos congruentes son suplementarios.

(2) ángulos rectos suplementarios son congruentes.

(*b*) Inversas parciales: (1) ángulos congruentes que no son complementarios no son ángulos rectos.

(2) ángulos suplementarios que no son congruentes no son ángulos rectos.

14.5 CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

En lógica y en geometría, a menudo es importante determinar si las condiciones en la hipótesis de una proposición son necesarias y suficientes para justificar la conclusión. Esto se hace constatando la veracidad o falsedad de la proposición y su converso, seguido de la aplicación de los siguientes principios:

Principio 1: *si una proposición y su converso son ambos verdaderos, entonces las condiciones en la hipótesis de la proposición son necesarias y suficientes para que ocurra la conclusión.*

Por ejemplo, la proposición "si los ángulos son ángulos rectos, entonces son congruentes y suplementarios", es verdadera, y su converso; "si los ángulos son suplementarios y congruentes, entonces son ángulos rectos", también es verdadera. Por lo tanto, el hecho de ser ángulos rectos es condición necesaria y suficiente para que sean congruentes y suplementarios.

Principio 2: *si una proposición es verdadera y su converso es falso, entonces las condiciones de la hipótesis son suficientes pero no necesarias para que ocurra la conclusión de la proposición.*

La proposición "si los ángulos son rectos, entonces son congruentes" es cierta, y su converso "si los ángulos son congruentes, entonces son ángulos rectos", es falsa. Por lo tanto, la condición de que los ángulos sean rectos es suficiente para que ocurra la congruencia, pero no necesaria. Esto es, no es necesario que los ángulos sean rectos para que sean congruentes.

Principio 3: *si una proposición es falsa pero su converso es verdadero, entonces las condiciones de la hipótesis son necesarias pero no suficientes para que ocurra la conclusión.*

La proposición "si los ángulos son suplementarios, entonces son ángulos rectos" es falsa; su converso "si los ángulos son rectos, entonces son suplementarios" es verdadera. Por lo tanto, los ángulos necesitan ser suplementarios para ser rectos, pero el hecho de que sean suplementarios no es suficiente para que sean rectos.

Principio 4: *si una proposición y su converso son ambas falsas entonces las condiciones en la hipótesis no son ni necesarias ni suficientes para su conclusión.*

La proposición "si los ángulos son suplementarios, entonces son congruentes" es falsa; su converso "si los ángulos son congruentes, entonces son suplementarios", también es falsa. Por lo tanto, el hecho de que sean suplementarios no es necesario ni suficiente para que los ángulos sean congruentes.

Estos principios se resumen en la tabla siguiente.

Cuando las condiciones en la hipótesis de una proposición son necesarias y suficientes para justificar la conclusión

Principio	Proposición	Converso	Suficiente	Necesaria
1	Verdadera	Verdadera	Sí	Sí
2	Verdadera	Falsa	Sí	No
3	Falsa	Verdadera	No	Sí
4	Falsa	Falsa	No	No

PROBLEMAS RESUELTOS

14.8 Determinación de las Condiciones Necesarias y Suficientes

Para cada una de las siguientes proposiciones determine si las condiciones en la hipótesis son necesarias y suficientes para justificar la conclusión.

(*a*) Un polígono regular es equiangular y equilateral.

(*b*) Un polígono equiangular es regular.

(*c*) Un polígono regular es equilateral.

(*d*) Un polígono equilateral es equiangular.

Soluciones

(*a*) Dado que la proposición y su converso son ciertas, las condiciones son necesarias y suficientes.

(*b*) Dado que la proposición es falsa y su converso es verdadero, las condiciones son necesarias pero no suficientes.

(*c*) Dado que la proposición es verdadera y su converso es falso, las condiciones son suficientes pero no necesarias.

(*d*) Dado que tanto la proposición como su converso son falsos, las condiciones no son ni necesarias ni suficientes.

Problemas complementarios

1. Determine el orden en el que deben ser definidos cada uno de los elementos de los conjuntos siguientes: (14.1)

(*a*) Joyas, anillo de bodas, ornamento, anillo.

(*b*) Automóvil, vehículo, automóvil comercial, camión.

(*c*) Cuadrilátero, rombo, polígono, paralelogramo.

(*d*) Triángulo obtuso, ángulo obtuso, ángulo, triángulo isósceles obtuso.

2. Corregir cada una de las siguientes definiciones: (14.2)

(*a*) Un polígono regular es un polígono equilateral.

(*b*) Un triángulo isósceles es un triángulo que tiene por lo menos dos lados y dos ángulos congruentes.

(*c*) Un pentágono es una figura geométrica con cinco lados.

(*d*) Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos.

(*e*) Un ángulo inscrito es uno formado por dos cuerdas

(*f*) Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes y paralelos.

(*g*) Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.

3. Determine el negativo de cada una de las siguientes proposiciones: (14.4)

(*a*) $x + 2 = 4$

(*b*) $3y \neq 15$

(*c*) Ella te ama.

(*d*) Su calificación es mayor que 65

(*e*) José pesa más que Ricardo.

(*f*) $a + b \neq c$

4. Determine la inversa de cada una de las siguientes proposiciones e indique si es o no verdadera. (14.5)

(a) Un cuadrado tiene diagonales congruentes.

(b) Un triángulo equiangular es equilátero.

(c) Un soltero es una persona no casada.

(d) El cero no es un número positivo.

5. Determine el converso, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes proposiciones. Indique si son verdaderas o falsas, y verifique la equivalencia lógica de la proposición y su contrapositiva al igual que la del converso y la inversa. (14.6)

(a) Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

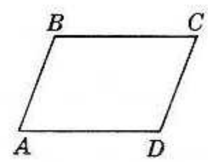
(b) Triángulos congruentes son triángulos similares.

(c) Si se intersectan dos líneas, entonces no son paralelas.

(d) Un senador de los Estados Unidos es un miembro del Congreso.

6. Construya conversos parciales e inversas parciales para cada uno de los teoremas detallados en la figura 14-5. (14.7)

(a) **Dado:** Cuadrilátero $ABCD$
(1) $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
(2) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Demuéstrese: (3) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



(b) **Dado:** $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$
(1) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
(2) $\angle B \cong \angle B'$
(3) $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
Demuéstrese: (4) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

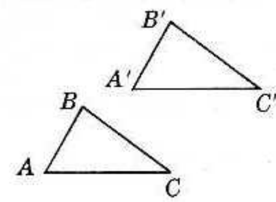


Fig. 14-5

7. Para cada una de las siguientes proposiciones determine si las condiciones en la hipótesis son necesarias o suficientes para justificar la conclusión. (14.8)

(a) Los senadores de los Estados Unidos son miembros electos del Congreso, dos por cada estado.

(b) Los miembros electos del Congreso son senadores de los Estados Unidos.

(c) Las personas electas son oficiales del gobierno.

(d) Si una mujer vive en la ciudad de Nueva York, entonces vive en el estado de Nueva York.

(e) Un soltero es un hombre no casado.

(f) Un soltero es una persona no casada.

(g) Un cuadrilátero con dos parejas de lados congruentes es un paralelogramo.